## Раздел 1. Введение в анализ

## Уроки 5-6. Обыкновенные дифференциальные уравнения

В результате изучения темы обучающиеся должны:
*знать:* основные понятия о математическом синтезе и анализе.
*уметь:* применять математические методы для решения профессиональных задач

### Теоретические сведения

**Дифференциальное уравнение (ДУ)** – это уравнение, в которое входит неизвестная функция под знаком производной или дифференциала.

Если неизвестная функция является функцией одной переменной, то дифференциальное уравнение называют **обыкновенным** (сокращенно ОДУ – обыкновенное дифференциальное уравнение). Если же неизвестная функция есть функция многих переменных, то дифференциальное уравнение называют **уравнением в частных производных**.

Максимальный порядок производной неизвестной функции, входящей в дифференциальное уравнение, называется **порядком дифференциального уравнения**.

Вот примеры ОДУ первого, второго и пятого порядков соответственно

1) $y' + 1 = 0;$

2) $\dfrac{d^2 y}{dx^2} + y = x \cdot \sin x;$

3) $y^{(5)} + y^{(3)} = a \cdot y, \quad a \in R$

В качестве примеров уравнений в частных производных второго порядка приведем

1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \cdot \left( \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad u = u(x, y, z, t), \quad v \in R;$

2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u = u(x, y)$

Далее мы будем рассматривать только обыкновенные дифференциальные уравнения *n-ого* порядка вида $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ или $F\left( x, y, \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2 y}{dx^2}, \ldots, \dfrac{d^n y}{dx^n} \right) = 0$, где *Ф(x, y) = 0* неизвестная функция, заданная неявно (когда возможно, будем ее записывать в явном представлении *y = f(x)*).

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется **интегрированием дифференциального уравнения**.

**Решение дифференциального уравнения** - это неявно заданная функция *Ф(x, y) = 0* (в некоторых случаях функцию *y* можно выразить через аргумент *x* явно), которая обращает дифференциальное уравнение в тождество.

ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ.

Решение дифференциального уравнения всегда ищется на заранее заданном интервале *X*. Почему мы об этом говорим отдельно? Да потому что в условиях многих задач об интервале *X* не упоминают. То есть, обычно условие задач формулируется так: «найдите решение обыкновенного дифференциального уравнения $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$». В этом случае подразумевается, что решение следует искать для всех *x*, при которых и искомая функция *y*, и исходное уравнение имеют смысл.

Решение дифференциального уравнения часто называют **интегралом дифференциального уравнения**.

Функции $y = \int x dx$ или $y = \frac{x^2}{2} + 1$ можно назвать решением дифференциального уравнения $y' = x$.

Одним из решений дифференциального уравнения $y' = x^2$ является функция $y = \frac{x^3}{3}$. Действительно, подставив эту функцию в исходное уравнение, получим тождество $y' = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$. Несложно заметить, что другим решением этого ОДУ является, например, $y = \frac{x^3}{3} + 1$. Таким образом, дифференциальные уравнения могут иметь множество решений.

**Общее решение дифференциального уравнения** – это множество решений, содержащее все без исключения решения этого дифференциального уравнения.

Общее решение дифференциального уравнения еще называют **общим интегралом дифференциального уравнения**.

Вернемся к примеру. Общее решение дифференциального уравнения $y' = x^2$ имеет вид $y = \int x^2 dx$ или $y = \frac{x^3}{3} + C$, где *C* – произвольная постоянная. Выше мы указали два решения этого ОДУ, которые получаются из общего интеграла дифференциального уравнения $y = \frac{x^3}{3} + C$ при подстановке *C = 0* и *C = 1* соответственно.

Если решение дифференциального уравнения удовлетворяет изначально заданным дополнительным условиям, то его называют **частным решением дифференциального уравнения**.

Частным решением дифференциального уравнения $y' = x^2$, удовлетворяющим условию *y(1)=1*, является $y = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}$.

Действительно, $y' = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}\right)' = x^2$ и $y(1) = \frac{1^3}{3} + \frac{2}{3} = 1$.

Основными задачами теории дифференциальных уравнений являются задачи Коши, краевые задачи и задачи нахождения общего решения дифференциального уравнения на каком-либо заданном интервале *X*.

**Задача Коши** – это задача нахождения частного решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным **начальным условиям**

$f(x_0)=f_0;\quad f'(x_0)=f_1;\quad f''(x_0)=f_2;\quad \ldots;\quad f^{(n-1)}(x_0)=f_{n-1}$,

где $f_0;\quad f_1;\quad f_2;\quad \ldots;\quad f_{n-1}$ - числа.

Обыкновенное дифференциальное уравнение *n-ого* порядка называется **линейным**, если оно имеет вид $f_n(x)\cdot y^{(n)}+f_{n-1}(x)\cdot y^{(n-1)}+\ldots+f_1(x)\cdot y'+f_0(x)\cdot y=f(x)$, а коэффициенты $f_0(x);\quad f_1(x);\quad f_2(x);\quad \ldots;\quad f_n(x)$ есть непрерывные функции аргумента *x* на интервале интегрирования.

Если $f(x)\equiv 0$, то уравнение $f_n(x)\cdot y^{(n)}+f_{n-1}(x)\cdot y^{(n-1)}+\ldots+f_1(x)\cdot y'+f_0(x)\cdot y=f(x)$ называют **линейным однородным дифференциальным уравнением (ЛОДУ)**, в противном случае – **линейным неоднородным дифференциальным уравнением (ЛНДУ)**.

Когда коэффициенты $f_0(x)=f_0;\quad f_1(x)=f_1;\quad f_2(x)=f_2;\quad \ldots;\quad f_n(x)=f_n$ являются постоянными функциями (то есть, некоторыми числами), то соответствующие дифференциальные уравнения называют **ЛОДУ с постоянными коэффициентами** (если $f(x)\equiv 0$) или **ЛНДУ с постоянными коэффициентами** (при ненулевой *f(x)*).

**Характеристическое уравнение** линейного однородного дифференциального уравнения *n-ой* степени с постоянными коэффициентами – это уравнение *n-ой* степени вида $f_n\cdot k^n+f_{n-1}\cdot k^{n-1}+\ldots+f_1\cdot k+f_0=0$.

## ВИДЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Каждому виду дифференциальных уравнений поставлен в соответствие метод решения с подробными пояснениями и решениями характерных примеров и задач. Вам остается лишь определить вид дифференциального уравнения Вашей задачи, найти подобный разобранный пример и провести аналогичные действия.

Для успешного решения дифференциальных уравнений с Вашей стороны также потребуется умение находить множества первообразных (неопределенные интегралы) различных функций. При необходимости рекомендуем обращаться к разделу методы интегрирования.

Сначала рассмотрим виды обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, которые могут быть разрешены относительно производной, далее перейдем к ОДУ второго порядка, следом остановимся на уравнениях высших порядков и закончим системами дифференциальных уравнений.

Напомним, что $y'=\frac{dy}{dx}$, если *y* является функцией аргумента *x*.

**Дифференциальные уравнения первого порядка.**

- **Простейшие дифференциальные уравнения первого порядка вида** $\boxed{y'=f(x)}$.

  Запишем несколько примеров таких ДУ $y'=0,\quad y'=x+e^x-1,\quad y'=\frac{2x}{\sqrt[3]{x^2-7}}$.

Дифференциальные уравнения $\boxed{f(x)\cdot y' = g(x)}$ можно разрешить относительно производной, произведя деление обеих частей равенства на *f(x)*. В этом случае приходим к уравнению $y' = \frac{g(x)}{f(x)}$, которое будет эквивалентно исходному при $f(x) \neq 0$.

Примерами таких ОДУ являются $e^x \cdot y' = 2x+1,\quad (\sqrt{x}+2)\cdot y' = 1$.

Если существуют значения аргумента *x*, при которых функции *f(x)* и *g(x)* одновременно обращаются в ноль, то появляются дополнительные решения. Дополнительными решениями уравнения $f(x)\cdot y' = g(x)$ при данных *x* являются любые функции, определенные для этих значений аргумента. В качестве примеров таких дифференциальных уравнений можно привести $x\cdot y' = \sin x,\quad (x^2 - x)\cdot y' = \ln(2x^2-1)$.

В статье простейшие дифференциальные уравнения первого порядка. Вы можете ознакомиться с подробной теорией и посмотреть примеры решения таких ОДУ.

- **Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными вида** $\boxed{f_1(y)\cdot g_1(x)dy = f_2(y)\cdot g_2(x)dx}$ **или** $\boxed{f_1(y)\cdot g_1(x)\cdot y' = f_2(y)\cdot g_2(x)}$.

Дифференциальные уравнения $\boxed{f(y)dy = g(x)dx}$ называют **уравнениями с разделенными переменными**.

Название этого вида дифференциальных уравнений достаточно показательно: выражения, содержащие переменные *x* и *y*, разделены знаком равенства, то есть, находятся по разные стороны от него.

Общее решение дифференциальных уравнений с разделенными переменными можно найти, проинтегрировав обе части равенства: $\int f(y)dy = \int f(x)dx$.

В качестве примеров ОДУ с разделенными переменными приведем $y^{\frac{2}{3}}dy = \sin x dx,\quad e^y dy = (x + \sin 2x)dx$.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными приводятся к ОДУ с разделенными переменными делением обеих частей уравнения на произведение $f_2(y)\cdot g_1(x)$.

То есть, получим $\frac{f_1(y)}{f_2(y)}dy = \frac{g_2(x)}{g_1(x)}dx$. Такое преобразование будет эквивалентным, если одновременно $f_2(y) \neq 0$ и $g_1(x) \neq 0$. Иначе могут потеряться некоторые решения.

Примерами ОДУ с разделяющимися переменными являются $\frac{dy}{dx} = y\cdot(x^2+e^x),\quad (y^2+\arccos y)\cdot \sin x\cdot y' = \frac{\cos x}{y}$.

Некоторые дифференциальные уравнения можно свести к уравнениям с разделяющимися переменными с помощью замены переменных.

Дифференциальные уравнения $\boxed{y' = f(ax+by),\quad a, b \in R}$ приводятся к ОДУ с разделяющимися переменными подстановкой $z = ax+by$. К примеру, уравнение $y' = \frac{1}{e^{2x+3y}}$ с помощью подстановки $z = 2x+3y$ приобретает вид $\frac{dz}{dx} = \frac{3+2e^z}{e^z}$.

ОДУ $\boxed{y' = f\left(\frac{x}{y}\right)}$ или $\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}$ преобразуются к уравнениям с разделяющимися переменными с помощью замен $z = \frac{x}{y}$ или $z = \frac{y}{x}$. Например, дифференциальное уравнение $y' = \frac{y}{x} \cdot \left(\ln \frac{y}{x} + 1\right)$ после замены $z = \frac{y}{x}$ принимает вид $x \cdot \frac{dz}{dx} = z \cdot \ln z$.

Некоторые дифференциальные уравнения следует немного преобразовать, чтобы можно провести замену. К примеру, достаточно разделить на $x^2$ или $y^2$ числитель и знаменатель правой части дифференциального уравнения $y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$, чтобы оно соответствовало случаям $y' = f\left(\frac{x}{y}\right)$ или $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ соответственно.

Дифференциальные уравнения $\boxed{y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right),\ a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in R}$ преобразуются к только что рассмотренным ОДУ $y' = f\left(\frac{x}{y}\right)$ или $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, если ввести новые переменные $\begin{cases} u = x - x_1 \\ v = y - y_1 \end{cases}$, где $(x_1; y_1)$ - решение системы линейных уравнений $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$ и провести некоторые преобразования.

Например, дифференциальное уравнение $y' = \frac{5x - y - 3}{3x + 2y - 7}$ после введения новых переменных $\begin{cases} u = x - 1 \\ v = y - 2 \end{cases}$ преобразуется к виду $\frac{dv}{du} = \frac{5u - v}{3u + 2v}$. Проводим деление на $u$ числителя и знаменателя правой части полученного уравнения и принимаем $z = \frac{u}{v}$.

В результате приходим к уравнению с разделяющимися переменными $u \cdot \frac{dz}{du} = \frac{5 - 4z - 2z^2}{3 + 2z}$.

В разделе дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными подробно разобрана теория и приведены подробные решения аналогичных примеров.

***Дифференциальное уравнение первого порядка*** $M(x,\ y)dx+N(x,\ y)dy=0$ называется ***однородным***, если $M(x,\ y)$ и $N(x,\ y)$ - однородные функции одной и то же степени.

Функция $f(x,\ y)$ называется однородной функцией *k*-й степени, если для любого *t* выполняется равенство $f(tx,\ ty)=t^k f(x,\ y)$.

В частном случае, если однородная функция имеет нулевую степень, то выполняется равенство

$f(tx,\ ty)=t^0 f(x,\ y)$

***Решение однородного дифференциального уравнения первого порядка*** сводится к решению дифференциального **уравнения с разделяющимися переменными**.

Для этого преобразуем уравнение к виду

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M(x,\ y)}{N(x,\ y)} \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx}=f(x,\ y), \quad (1)$$

где $f(x,\ y)=-\dfrac{M(x,\ y)}{N(x,\ y)}$ - однородная функция нулевой степени как отношение однородных функций одинаковых степеней. Это равенство справедливо при любом *t*. В частности, если $t=\dfrac{1}{x}$, то $f\left(\dfrac{x}{x},\ \dfrac{y}{x}\right)=f(x,\ y)$, или $f(x,\ y)=F\left(\dfrac{y}{x}\right)$, т. е. функция $f(x,\ y)$ представлена в виде функции от $\dfrac{y}{x}$.

Обозначим это отношение через *z*, т. е. $z=\dfrac{y}{x}$, откуда $y=zx$. Тогда

$$\frac{dy}{dx}=z'x+zx'=z'x+z$$

и уравнение (1) преобразуется так:

$$z'x+z=F(z); \quad \frac{dz}{dx}\bullet x=F(z)-z;$$

$$x\,dz=\left[F(z)-z\right]dx.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделив переменные и выполнив почленное интегрирование, затем следует заменить *z* на $\dfrac{y}{x}$.

**Пример.** Решить ***однородное дифференциальное уравнение***

$$\left(xy+y^2\right)dx-x^2dy=0$$

Решение. Сначала преобразуем данное уравнение к виду

$$\frac{dy}{dx}=\frac{xy+y^2}{x^2},$$

а затем произведём подстановку $y=zx$, откуда $y'=z'x+z$. Тогда уравнение примет вид

$$z'x+z=\frac{xzx+(zx)^2}{x^2}, \text{ или } x\frac{dz}{dx}=z^2, \text{ или } \frac{dz}{z^2}=\frac{dx}{x}.$$

Почленное интегрирование даёт

$-\frac{1}{z}=\ln|x|+\ln|C|$, или $\ln|Cx|=-\frac{1}{z}$.

Заменяя *z* на $\frac{y}{x}$, получим $\ln|Cx|=-\frac{x}{y}$, откуда $y=-\frac{x}{\ln|Cx|}$.

***Дифференциальное уравнение называется линейным***, если в нём функция и все её производные содержатся только в первой степени, отсутствуют и их произведения. Общий вид линейного дифференциального уравнения первого порядка таков:

$$y'+a_1(x)y=f(x),$$

где $a_1(x)$ и $f(x)$ - непрерывные функции от *x*.

**Как решить линейное дифференциальное уравнение первого порядка?**

Интегрирование такого уравнения можно свести к интегрированию двух двух дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными. Великие математики доказали, что нужную функцию, то есть решение уравнения, можно представить в виде произведения двух неизвестных функций $u(x)$ и $v(x)$. Пусть $y = uv$, тогда по правилу дифференцирования произведения функций

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}v+u\frac{dv}{dx}$$

и ***линейное дифференциальное уравнения первого порядка*** примет вид

$$\frac{du}{dx}v+u\frac{dv}{dx}+a_1(x)uv=f(x)$$

или

$$v\frac{du}{dx}+u\left[\frac{dv}{dx}+a_1(x)v\right]=f(x).\quad (*)$$

Выберем функцию $v(x)$ так, чтобы в этом уравнении выражение в скобках обратилось в нуль:

$$\frac{dv}{dx}+a_1(x)v=0,$$

то есть в качестве функции *v* берётся одно из частных решений этого уравнения с разделяющимися переменными, отличное от нуля. Разделяя в уравнении $\frac{dv}{dx}+a_1(x)v=0$ переменные и выполняя затем его почленное интегрирование, найдём функцию *v*. Так как функция *v* - решение уравнения, то её подстановка в уравнение $v\frac{du}{dx}+u\left[\frac{dv}{dx}+a_1(x)v\right]=f(x)$ даёт

$$v\frac{du}{dx}=f(x).$$

Таким образом, для нахождения функции *u* получили дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Найдём функцию *u* как общее решение этого уравнения.

Теперь можем найти решение исходного ***линейного дифференциального уравнения первого порядка***. Оно равно произведению функций *u* и *v*, т. е. $y = uv$. *u* и *v* уже нашли.

**Пример 1.** Решить ***линейное дифференциальное уравнение первого порядка***

$$y'-\frac{y}{x}=\frac{x+1}{x}.$$

Решение. Как было показано в алгоритме, $y = uv$. Подставляя выражения для $\frac{dy}{dx}$ и $y$ в уравнение вида (*), получим

$$v\frac{du}{dx}+u\left(\frac{dv}{dx}-\frac{1}{x}v\right)=\frac{x+1}{x}$$ (* *).

Выберем функцию $v(x)$ так, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{dv}{dx}-\frac{1}{x}v=0$$ или $$\frac{dv}{dx}=\frac{v}{x}.$$

После разделения переменных это уравнение принимает вид

$$\frac{dv}{v}=\frac{dx}{x}.$$

Почленное интегрирование даёт

$$\ln|v|=\ln|x|$$

$$v=x.$$

Подставив найденное значение функции $v$ в равенство (* *), получим

$$x\frac{du}{dx}=\frac{x+1}{x}.$$

Это **уравнение с разделяющимися переменными** для нахождения функции $u$.

Разделяем переменные:

$$du=\frac{x+1}{x^2}dx$$

и, интегрируя находим $u$:

$$u=\int\frac{x+1}{x^2}dx=\int\frac{x}{x^2}dx+\int\frac{1}{x^2}dx=$$

$$=\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{1}{x^2}dx=\ln x-\frac{1}{x}+C.$$

Теперь можно записать общее ***решение данного линейного дифференциального уравнения первого порядка***:

$$y=\left(\ln x-\frac{1}{x}+C\right)x=$$

$$=x\ln x-1+Cx.$$

Как видим, всё решение выполняется точным следованием алгоритму, приведённому в начале статьи. Меняются лишь виды функций в уравнениях. Степени, корни, экспоненты и т.д. Это чтобы алгоритм отпечатался в памяти и был готов к разным случаям, которые только могут быть на контрольной и экзамене. А кому стало скучно, наберитесь терпения: впереди ещё примеры с интегрированием по частям!

Важное замечание. При решении заданий не обойтись без преобразований выражений. Для этого требуется открыть в новых окнах пособия **Действия со степенями и корнями** и **Действия с дробями**.

**Пример 2.** Решить ***линейное дифференциальное уравнение первого порядка***

$$y'-\frac{2x}{x^2+1}y=x\sqrt{x^2+1}.$$

Решение. Подставляя выражения для $\frac{dy}{dx}$ и $y$ в уравнение вида (*), получим

$$v\frac{du}{dx}+u\left(\frac{dv}{dx}-\frac{2x}{x^2+1}v\right)=x\sqrt{x^2+1}$$ (* *).

Выберем функцию $v(x)$ так, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{dv}{dx}-\frac{2x}{x^2+1}v=0.$$

После разделения переменных это уравнение принимает вид

$$\frac{dv}{v}=\frac{2x}{x^2+1}dx.$$

Почленное интегрирование даёт

$$\ln|v|=\ln\left(x^2+1\right)$$

$$v=x^2+1$$

Подставив найденное значение функции $v$ в равенство (* *), получим

$$\left(x^2+1\right)\frac{du}{dx}=x\sqrt{x^2+1}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными для нахождения функции $u$. Разделяем переменные:

$$du=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

и, интегрируя находим $u$:

$$u=\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\sqrt{x^2+1}+C$$

Теперь можно записать общее решение данного линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y=\left(\sqrt{x^2+1}+C\right)\left(x^2+1\right)=$$
$$=\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}+C\left(x^2+1\right).$$