Раздел 1. Введение в анализ

Уроки 7-8. Комплексные числа.

В результате изучения темы обучающиеся должны:

знать: основные понятия о математическом синтезе и анализе.

уметь: применять математические методы для решения профессиональных задач

Теоретические сведения

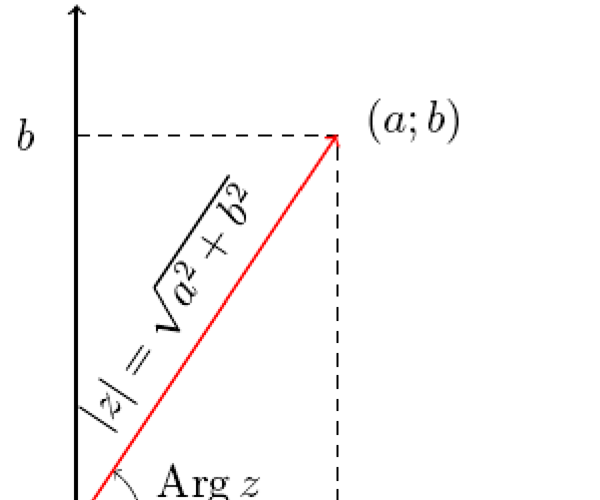
Комплексное число — это выражение вида $a + bi$, где a, b — действительные числа, а i — так называемая *мнимая единица*, символ, квадрат которого равен -1, то есть $i^2 = -1$. Число a называется *действительной частью*, а число b — *мнимой частью* комплексного числа $z = a + bi$. Если $b = 0$, то вместо $a + 0i$ пишут просто a. Видно, что действительные числа — это частный случай комплексных чисел.

Арифметические действия над комплексными числами те же, что и над действительными: их можно складывать, вычитать, умножать и делить друг на друга. Сложение и вычитание происходят по правилу $(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$, а умножение — по правилу $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$ (здесь как раз используется, что $i^2 = -1$). Число $\bar{z} = a - bi$ называется *комплексно-сопряженным* к $z = a + bi$.

Равенство $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$ позволяет понять, как делить одно комплексное число на другое (ненулевое) комплексное число:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

(Например, $\frac{3+4i}{1+2i} = \frac{11}{5} - \frac{2}{5}i$.)



У комплексных чисел есть удобное и наглядное геометрическое представление: число $z = a + bi$ можно изображать вектором с координатами $(a; b)$ на декартовой плоскости (или, что почти то же самое, точкой — концом вектора с этими координатами). При этом сумма двух комплексных чисел изображается как сумма соответствующих векторов (которую можно найти по правилу параллелограмма). По теореме Пифагора длина вектора с координатами $(a; b)$ равна $\sqrt{a^2 + b^2}$. Эта величина называется *модулем* комплексного числа $z = a + bi$ и обозначается $|z|$. Угол, который этот вектор образует с положительным направлением оси абсцисс (отсчитанный против часовой стрелки), называется *аргументом* комплексного числа z и обозначается Arg z. Аргумент определен не однозначно, а лишь с точностью до прибавления величины, кратной 2π радиан (или 360°, если считать в градусах) — ведь ясно, что поворот на такой угол вокруг начала координат не изменит вектор. Но если вектор длины r образует угол φ с положительным направлением оси абсцисс, то его координаты равны

$(r \cdot \cos\varphi;\ r \cdot \sin\varphi)$. Отсюда получается *тригонометрическая форма записи* комплексного числа: $z = |z| \cdot (\cos(\operatorname{Arg} z) + i \sin(\operatorname{Arg} z))$. Часто бывает удобно записывать комплексные числа именно в такой форме, потому что это сильно упрощает выкладки. Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме выглядит очень просто: $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2) + i \sin(\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2))$ (при умножении двух комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются). Отсюда следуют *формулы Муавра*: $z^n = |z|^n \cdot (\cos(n \cdot (\operatorname{Arg} z)) + i \sin(n \cdot (\operatorname{Arg} z)))$. С помощью этих формул легко научиться извлекать корни любой степени $n \in \mathbb{Z}$ из комплексных чисел. *Корень n-й степени из числа z* — это такое комплексное число w, что $w^n = z$. Видно, что $|w| = \sqrt[n]{|z|}$, а $\operatorname{Arg} w = \frac{1}{n} \operatorname{Arg} z + \frac{2\pi k}{n}$, где k может принимать любое значение из множества $\{0, 1, ..., n-1\}$. Это означает, что всегда есть ровно n корней n-й степени из комплексного числа (на плоскости они располагаются в вершинах правильного n-угольника).

Часто бывает удобна немного другая форма записи комплексного числа.

Пусть $z = a + bi,\ r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ и $\varphi = \arg z$. Тогда по определению аргумента имеем:

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{r}, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{r}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = r\cos\varphi, \\ b = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Отсюда получается

$$z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Такая форма называется ***тригонометрической формой записи комплексного числа***. Как видно, для того, чтобы перейти от алгебраической формы записи комплексного числа к тригонометрической форме, нужно найти его модуль и один из аргументов.

Пример 1

Записать число $z = 1 - \sqrt{3}i$ в тригонометрической форме.

Решение

Найдём модуль этого числа: $|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$. Аргумент данного числа находится из системы

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{1}{2}, \\ \sin\varphi = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Значит, один из аргументов числа $z = 1 - \sqrt{3}i$ равен $-\frac{\pi}{3}$. Получаем:

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Ответ. $2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.