Урок № 3-4
Действия над комплексными числами

Цель работы:
студент должен:
знать:
- алгебраическую форму комплексного числа;
- тригонометрическую форму комплексного числа;

уметь:
- выполнять действия над комплексными числами, представленными в различных формах.

Сведения из теории:
Алгебраическая форма комплексного числа

Обозначим $\sqrt{-1} = i$ и назовём мнимой единицей, ($i^2 = -1$). Тогда число вида $z = a + bi$, где a и b - любые действительные числа, назовём комплексным числом.

Здесь a - называют действительной частью комплексного числа, bi - называют мнимой частью, b - коэффициентом мнимой части комплексного числа.

Действия над комплексными числами, представленными в алгебраической форме

Пусть даны два числа $z_1 = a_1 + b_1 i$, и $z_2 = a_2 + b_2 i$.

Для этих чисел понятия равенство и действия сложения, умножения определены следующим образом:

1) Два комплексных числа называются равными, если равны их действительная и мнимая части, т. е. $a_1=a_2$, $b_1=b_2$.

2) Суммой двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$.

3) Произведением двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$.

4) Модулем комплексного числа называется длина вектора соответствующего этому комплексному числу на плоскости и вычисляется по формуле: $|\vec{z}| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

5) Аргументом комплексного числа называется угол, образованный вектором с положительным направлением действительной оси и вычисляется по формуле: $\arg z = \arg(a + bi) = \phi + 2\pi k$. Т. о. для каждого комплексного числа можно указать бесконечное множество аргументов.

Для нахождения аргумента необходимо:

1. Определить в какой координатной четверти находится комплексное число.
2. Найти в этой четверти угол решив уравнение:

$$tg\phi = \frac{b}{a};\ \phi = arctg\frac{b}{a} = \phi + \pi k,\ \ k \in Z\ .$$

Пример 1

Решите квадратное уравнение: $x^2 - 6x + 13 = 0$.

Решение:

вычислим корни квадратного уравнения через дискриминант:

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 13}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16 \cdot (-1)}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2}.$$

$$x_1 = \frac{6 \pm 4i}{2} = \frac{2(3 + 2i)}{2} = 3 + 2i;\ \ x_2 = 3 - 2i.$$

Получена пара взаимно - сопряжённых комплексных чисел $3 \pm 2i$, где $a = 3; b = 2.$

Заметим, что всякое алгебраическое уравнение степени *n* имеет ровно *n* корней, среди которых могут быть как действительные (различные или равные), так и комплексные (обязательно попарно взаимно – сопряжённые) корни.

Тригонометрическая форма комплексного числа

Запись комплексного числа в виде $a + bi = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ называется тригонометрической формой комплексного числа.

Действия над комплексными числами, представленными в тригонометрической форме

Над комплексными числами в тригонометрической форме выполняются действия умножения, деления, возведения в степень и извлечение корня *n*-ой степени.

Пусть даны два числа $z_1 = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2)$, тогда:

1) Произведением комплексных чисел называется комплексное число, которое вычисляется по формуле: $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2))$.

2) Частным комплексных чисел называется комплексное число, которое вычисляется по формуле: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\phi_1 - \phi_2) + i\sin(\phi_1 - \phi_2))$.

3) Для возведения в степень: $z^n = r^n(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi))$.

Пример 2

Упростите: $\frac{1 + 2i^5}{1 + 3i^{21}}$.

Решение:

упростим дробь (понизим степень числителя и знаменателя), используя $(i^2 = -1)$:

$$i^5 = i^4 i^1 = (i^2)^2 i = (-1)^2 i = i;$$
$$i^{21} = i^{20} i^1 = (i^2)^{10} i = (-1)^{10} i = i\ .$$

Подставим полученные выражения в исходную дробь и преобразуем её:

$$\frac{1+2i^5}{1+3i^{21}}=\frac{1+2i}{1+3i}=\frac{(1+2i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\frac{1-3i+2i-6i^2}{1+9}=\frac{1-i+6}{10}=\frac{7-i}{10}=\frac{7}{10}-\frac{i}{10}.$$

Пример 3

Вычислите: $(\sqrt{2}(\cos 10^0+i\sin 10^0))^2\cdot 2(\cos 40^0+i\sin 40^0)$.

Решение:

для первого комплексного числа используем формулу возведения в степень, а затем воспользуемся формулой произведения комплексных чисел:

$$2(\cos 20^0+i\sin 20^0)\cdot 2(\cos 40^0+i\sin 40^0)=4(\cos 60^0+i\sin 60^0)=4(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})=2+2\sqrt{3}i.$$

Для извлечения корня n-й степени из комплексного числа $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ используется формула:

$$z_k=\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),$$

где $\sqrt[n]{r}$ - арифметический корень, $k=0,1,2,...,n-1$.

Пример 4

Решите уравнение: x^2-2x+10=0.

Решение:

для решения воспользуемся обычными формулами вычисления корней квадратных уравнений:

$$a=1,\ b=-2,\ c=10,$$

$$D=b^2-4ac=(-2)^2-4\cdot1\cdot10=4-40=-36.$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{2\pm\sqrt{-36}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{36\cdot(-1)}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{36\cdot i^2}}{2}=\frac{2\pm 6i}{2}=\frac{2(1\pm3i)}{2}=1\pm3i.$$

Получили пару комплексных взаимно сопряженных корней.